1. T. numere:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

Dem: ex: 12

$\varphi(12)$

$\boxed{\frac{1}{12}}$ $\cancel{\frac{2}{12}}$ $\cancel{\frac{3}{12}}$ $\cancel{\frac{4}{12}}$ $\boxed{\frac{5}{12}}$ $\cancel{\frac{6}{12}}$ $\boxed{\frac{7}{12}}$ $\cancel{\frac{8}{12}}$ $\cancel{\frac{9}{12}}$ $\cancel{\frac{10}{12}}$ $\boxed{\frac{11}{12}}$ $\cancel{\frac{12}{12}}$

$\varphi(6)$ $\boxed{\frac{1}{6}}$ $\boxed{\frac{5}{6}}$

$\varphi(4)$ $\boxed{\frac{1}{4}}$ $\boxed{\frac{3}{4}}$

$\varphi(3)$ $\boxed{\frac{1}{3}}$ $\boxed{\frac{2}{3}}$

$\varphi(2)$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\varphi(1)$ $\boxed{1}$

Ce progresii geometrice au o inf. de nr. raționale?

I term? rație?

$$a_1 \quad a_2 \dots \quad a_n \quad a_{n+1}$$

$$a_i > a_j \in Q$$

$$r^{i-j} = \frac{a_i}{a_j} \in Q \qquad r = \sqrt[n]{\frac{p}{q}}$$

$$a_1 = \frac{a_i}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{i}{n}}}$$

$$a_1 = \frac{r}{\sqrt[n]{\left(\frac{p}{q}\right)^{i}}}$$

Irațional la irațional să fie rațional.

Dacă $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ ✓

Dacă nu $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \in \mathbb{Q}$

J. s. a. î. nu există un nr. finit de nr. rat. $r_1, r_2, \dots r_n$ a.î. orice nr. rațional se scrie de forma:

$$k_1 r_1 + k_2 r_2 + \dots + k_n r_n ,$$

cu $k_1, \dots k_n \in \mathbb{Z}$.

Fie $r_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ $\quad (p_i, q_i) = 1$

$a = \dfrac{1}{p}$, p nr. prim

$p \nmid q_1 q_2 \dots q_n$

$$\frac{1}{p} = \frac{k_1 p_1 + \dots + k_n p_n}{q_1 q_2 \dots q_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \mid q_1 \dots q_n \quad \text{\&}$$

$\square$

S. s. det $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ a. î.

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ (\forall) x, y \in \mathbb{Q}$$

Densități

$\mathbb{Q}$ densă în $\mathbb{R}$.

Adică $(\forall)$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ $(\exists)$ $x \in \mathbb{Q}$ cu $a < x < b$.

$$\overbrace{a+n}^{a_1} > 0 \Rightarrow \overbrace{b+n}^{b_1} > 0$$

$$b_1 - a_1 = b - a > 0$$

$(\exists)$ $k \in \mathbb{Z}$ a. î. $(b_1 - a_1) \cdot k > 1$ (eventual sup.

Deci $\frac{1}{k} < b_1 - a_1$

Fie m cel mai mic nr. nat. a.î.

$m > a_1 \cdot k \Rightarrow \frac{m}{k} > a_1$

Tp. $\frac{m}{k} > b_1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{m-1}{k} \geq b_1 - \frac{1}{k} > a_1$ Dacă cu m minim.

$\frac{m}{k} \in (a_1, b_1) \Rightarrow \frac{m}{k} - n \in (a, b)$.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ densă în $\mathbb{R}$

$a, b \in \mathbb{R}$ $\qquad a < r_1 < b$

Ca mai sus

sp. $a, b \geq 0$ $\qquad a < r_1 < r_2 < b$

$$r_1 = \frac{p_1}{q_1} \qquad r_1 < r_2$$

$$r_2 = \frac{p_2}{q_2}$$

$$r_1 = \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2} = \frac{P_1}{Q}$$

$$r_2 = \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} = \frac{P_2}{Q}$$

$$P_1 < P_2 \Rightarrow P_2 \geq P_1 + 1$$

Am obt.

$$a < \frac{P_1}{Q} < \frac{P_1 + 1}{Q} < b$$

$$P_1 < \overbrace{\sqrt{P_1^2 + 1}}^{\in Q} < P_1 + 1$$

$$P_1^2 < P_1^2 + 1 < P_1^2 + 2P_1 + 1$$

$$a < \underset{\underset{\underset{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}{\cap}}{\not\in}}{\frac{\sqrt{p_1^2+1}}{\mathbb{Q}}} < b$$

<u>Ex</u>: $M = \{ \{\sqrt{2n}\} \mid n \in \mathbb{N} \}$ densă în $[0,1)$.

Fie $a, b \in [0,1)$ Fie $a < \underset{\underset{\mathbb{Q}}{\cap}}{a_1} < \underset{\underset{\mathbb{Q}}{\cap}}{b_1} < b$

Căutăm n a.î.

$$\frac{1}{q} = a_1 \leq \{\sqrt{2n}\} \leq b_1 = \frac{r}{2}$$

$0 \leq r < h < 2$

Fie $k = [\sqrt{2n}]$

$$\frac{1}{q} \leq \sqrt{2n} - k \leq \frac{r}{2} \quad \Big| + k$$

$$\frac{1}{q} + k \leq \sqrt{2n} \leq \frac{r}{2} + k \quad \Big|^2$$

$$\underbrace{(p+kq)^2}_{M} \leq 2nq^2 \leq \underbrace{(r+kq)^2}_{N}$$

$$N - M = \underbrace{(r-p)}_{\geq 1}(\underbrace{p+r}_{\geq 1}+2kq) > 2q^2.$$

Alegem $k = q$

Deci între M și N e măcar un multiplu de $2q^2$, adică $2nq^2$ $\square$

Teorema lui Kronecker:

Vrem să arătăm că, dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mulțimea $A = \{ m\alpha + n \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$ densă în $\mathbb{R}$.

E numai α irațional!

$$\alpha = \frac{t}{q} \Rightarrow A = \left\{ \frac{z}{q} \,\middle|\, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\Downarrow$ nu e densă în $\mathbb{R}$

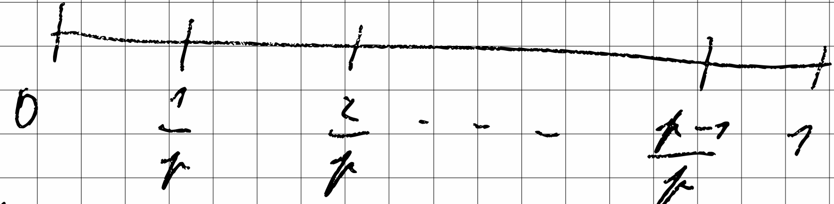
$$\frac{z}{q} \overset{\nexists}{<} \frac{z+1}{q}$$

Lemă (T. Dirichlet)

Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Atunci $(\forall)\, p \in \mathbb{N}^*$ $(\exists)\, m, n \in \mathbb{Z}$ a.î. $0 < m \le p$

$$0 < |m\alpha - n| \le \frac{1}{p}$$

Din lemă:



$x_0 = 0$

$x_1 = \alpha$ $\quad \dots \quad$ $x_p = p\alpha$ $\Big|$ $p+1$ numere

$x_2 = 2\alpha$

Părțile lor fracț. sunt în $[0,1)$,

deci măcar 2 sunt în același interval:

$$\left[0, \frac{1}{p}\right], \ldots, \left[\frac{p-1}{p}, 1\right].$$

$i > j$

$$\left|\{i\alpha\} - \{j\alpha\}\right| < \frac{1}{p}$$

$$\left|\underbrace{(i-j)}_{m}\alpha - \underbrace{[i\alpha] + [j\alpha]}_{n}\right| \leq \frac{1}{p}$$

$|m\alpha - n| \neq 0$, căci $\alpha \neq \frac{n}{m}$ $\square$

Teoremă:

Fie $a < b$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

Căutăm $m, n \in \mathbb{Z}$

$$a < m \cdot \alpha + n < b$$

Ca mai înainte, pp. $a > 0$

Fie $d = b - a$ și $p = \left[\frac{1}{d}\right] + 1$.

Am luat așa pt. ca $p > \frac{1}{d}$ i.e $d > \frac{1}{p}$

$\frac{1}{p} < b - a$.

Din T. Dirichlet, $(\exists)$ m_1, n_1

$|m_1 \alpha - n_1| < \frac{1}{p} < b - a$

Schimbând eventual m_1 şi n_1 cu

$-m_1$ şi $-n_1$

$m_1 \alpha - n_1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists)\ k \in \mathbb{N}^*$ a.î.

$k \cdot (m_1 \alpha - n_1) > a$

Mai mult, fie k minim cu

aceastǎ propr.

$|m_1 \alpha - n_1| < \frac{1}{p} \Rightarrow$

$k \cdot (m_1 \alpha - n_1) < b$.

Deci $a < k \cdot m_1 \alpha - k \cdot n_1 < b$

$$\underset{(m)}{\overset{\shortparallel}{k \cdot m_1}} \qquad \underset{(-n)}{\overset{\shortparallel}{k \cdot n_1}}$$

$\mathbb{Q}$ numărabilă

Def: Spunem că două mulțimi A și B sunt echipotente (au același cardinal) dacă $(\exists)\ f: A \to B$ bijectivă:

i.e. $(\forall)\ y \in B\ (\exists)!\ x \in A$ a.î.

$$f(x) = y$$

Altfel, $(\exists)\ f^{-1}: B \to A$ a.î.

$$f(f^{-1}(x)) = x,\ (\forall)\ x \in B$$

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ (\forall)\ x \in A$$

$\boxed{P_1}$ $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x = \text{par} \\ -\frac{x+1}{2}, & x = \text{impar} \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x-1, & x < 0 \end{cases}$$

$\boxed{P_2}$ $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$

$(\forall)\ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

n se poate scrie în mod unic în fact. primi:

$$n = \sum_{i=1}^{k_n} p_{n,i}^{l_{n,i}} \qquad p_{n,i} < p_{n,i+1}$$

Fie funcția $h : \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \to \mathbb{Q}_+$

$$h(n) = \prod_{i=1}^{k_n} p_{n,i}^{f(l_{n,i})} ,$$

unde f e cea de la $\underline{P_1}$

$F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_+$

$$F(n) = \begin{cases} h(n), & n > 1 \\ 1, & n = 1 \\ 0, & n = 0 \\ -1, & n = -1 \\ -h(-n), & n < -1 \end{cases}$$

Să vedem că F e bijectivă:

$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+ \setminus \{1\}$

$\frac{m}{n}$ se poate scrie ca prod. de fact. primi cu puteri întregi

$$\frac{m}{n} = \prod_{i=1}^{l_{\frac{m}{n}}} p_{\frac{m}{n},i}^{\,l_{\frac{m}{n},i}} \quad , \quad p_{\frac{m}{n},i} < p_{\frac{m}{n},i+1}$$

$$h_1\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{i=1}^{l_{\frac{m}{n}}} p_{\frac{m}{n},i}^{\,f^{-1}(l_{\frac{m}{n},i})}$$

$$h_1 = h^{-1}$$

$G : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$

$$G(x) = \begin{cases} h_1(x), & x > 1 \\ h_1(x), & x \in (0,1) \\ 1, & x = 1 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x = -1 \\ -h_1(-x), & x \in (-1,0) \\ -h_1(-x), & x < -1 \end{cases}$$

$\boxed{P3}$ $[0,1)$ nu e numărabilă.

Pp. $(\exists)\ f : \mathbb{N} \to [0,1)$ bij.

$f(0) = 0, a_0^0 a_1^0 a_2^0 \ldots a_n^0 \ldots$

$f(1) = 0, a_0^1 a_1^1 a_2^1 \ldots a_n^1 \ldots$

$\vdots$

$f(n) = 0, a_0^n a_1^n a_2^n \ldots a_n^n \ldots$

$x = 0, (a_0^0+1)(a_1^1+1) \ldots (a_n^n+1) \ldots$

$x \notin \operatorname{Im} f$ $\quad \lightning$

$[0,1)$ nu e num.

Niciun interval nu e numărabil.

$\mathbb{R}$ nu e numărabil.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nu e numărabil.

Submulț. a unei numărabile e cel mult num.

Reuniune de numărabile e numărabilă.

Probleme:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$

Arătați că $\mathrm{Im}\, f$ nu conține niciun interval.

Ip. abs. $(a, b) \subseteq \mathrm{Im}\, f \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\, f$ nu e numărabilă.

$\mathrm{Im}\, f = f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup f(\mathbb{Q})$

$f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ e cel mult numărabilă

$f(\mathbb{Q})$ e cel mult numărabilă?

alegem unul

$(\forall)\, y \in f(\mathbb{Q})$ $(\exists)\, x_y \in \mathbb{Q}$ a.î. $f(x_y) = y$.

Deci $\varphi : f(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$

$\varphi(y) = x_y$ e bijectivă.

$f(\mathbb{Q}) \sim \varphi(f(\mathbb{Q})) \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow f(\mathbb{Q})$ cel mult numărabilă.

Problemă:

$f:(0,1)\to(0,1)$ bij.

S. se det. mulțimea:

$A = \{f(x)-f(y) \mid x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$.

Clar $A\subseteq(-1,1)$

Pp. că $A\neq(-1,1)$

$x_0\in(-1,1)\setminus A$.

$f(x)-f(y)=x_0 \Rightarrow x$ sau $y\in\mathbb{Q}$

$f(x)=f(y)+x_0$

Dacă $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și (pt simplitate

$-x_0<f(y)<1-x_0 \Rightarrow$ $x_0>0$)

$0<f(y)+x_0<1$, deci

$f(y)+x_0\in f(\mathbb{Q}\cap(0,1))$

Dar: $(0,1)=f(0,1)=f(\mathbb{Q}^{\cap(0,1)})\cup f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^{\cap(0,1)}$

Ca mai înainte $f(\mathbb{Q} \cap (0,1))$ e

cel mult numărabilă,

deci $M = \{ y \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \mid f(y) \in (-x_0, 1-x_0) \}$

e cel mult numărabilă.

De ce?

$\underbrace{f(M) + x_0}_{\text{cel mult num.}} \subseteq f(\mathbb{Q} \cap (0,1))$

$\varphi : M \to f(M) + x_0$

$\varphi(y) = f(y) + x_0$ e bij, căci f e bij.

Deci M e cel mult numărabilă.

$f^{-1}((-x_0, 1-x_0)) = M \cup \{ \underline{y \in \mathbb{Q} \cap (0,1)} \mid f(y) \in (x_0, 1-x_0) \}$

cel mult num.

Fie $(\alpha, \beta) = (-x_0, 1-x_0) \cap (0, 1)$

$f^{-1}(\alpha, \beta)$ cel mult numărabilă,

deci (α, β) cel mult numărabilă

Fals!

Rezultă $A = (-1, 1)$